Løsn. innlev 1 foa 130 h 2004 – maskin/marin

Nr 1 a) Når vi skriver $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k}$ og sier at dette er en rekke, så menes:

$$(*) \qquad \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

idet en rekke er definert som en følge av delsummer.

(bmk) Mange, nesten alle, besvarte dette spørsmålet ved å si at det var en alternerende rekke. Det er det jo, og spørsmålet kunne nok misforstås.

b) Leibnitz konvergenskriterium for alternerende rekker.

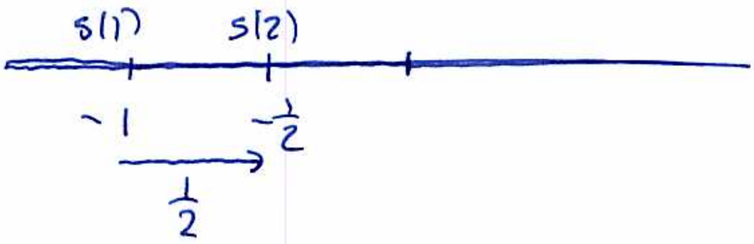
c) Dette spørsmålet kan ikke mistolkes og svaret er:

$$(**) \qquad -\ln 2 = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^k}{k}$$

Grenseverdien til en rekke, (som også kalles summen til rekken) er definert som en slik (**) grenseverdi, nemlig grenseverdien til delsummene.

bmk spørsmål a) og c) er de to kjerne punktene i forståelse av hva en rekke er.

d) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = -1 + \frac{1}{2} - \frac{1}{3} + \frac{1}{4} - \frac{1}{5} + \dots$



Denne var besvart godt av nesten alle.

Vi starter med -1 og legger til $\frac{1}{2}$, resultat $-\frac{1}{2}$. Videre går vi nedover tall-linjen igjen og så tilbake et kortere stykke, Da ligger vi neden for $-\frac{1}{2}$.

Så fortsetter vi på samme måte. Starter nedenfor $-\frac{1}{2}$ går ned et stykke og opp igjen et mindre stykke.
Vi kan da aldri komme ovenfor $-\frac{1}{2}$ $\Rightarrow$! negativ sum

e) $\displaystyle\sum_{k=2}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k} - \sum_{k=1}^{1} \frac{(-1)^k}{k}$

$$= -\ln 2 - (-1) = \underline{\underline{1 - \ln 2}}$$

Nr 2 a) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{k^2+1}$ $\quad 2+(-1)^k = \begin{cases} 2-1 \\ 2+1 \end{cases} = \begin{cases} 1 & k \text{ odde} \\ 3 & \text{jamn} \end{cases}$

Altså vi har en positiv rekke og kan bruke sammenligningskriteriet. Vi regner:

$$0 \le \frac{2+(-1)^k}{k^2+1} \le \frac{3}{k^2+1} \le \frac{3}{k^2} \qquad k=1,2,3\ldots$$

Men $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{3}{k^2} = 3 \cdot \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ er konv. fordi $\sum \frac{1}{k^2}$

er en kjent konv. rekke. Altså vår rekke er konv.

Alt. del opp: $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2+(-1)^k}{k^2+1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{k^2+1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{(-1)^k}{k^2+1}$

og argumenter for at disse to er konvergente.

Den første igjen ved sammenlign. $0 \le \frac{2}{k^2+1} \le \frac{2}{k^2}$
eller ved integralkriteriet.

Den siste fordi den er abs. konvergent $\sum \frac{1}{k^2+1}$
eller ved Leibnitz.

b) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-3)^k}{2^k+1}$ dette er en alternerende rekke,

men størrelsen (absoluttverdien) av leddene går ikke mot null. Derfor kan vi ikke bruke Leibnitz.

Men, hvis leddene ikke går mot null, så kan ikke rekken konvergere.

Vi regner:

$$\left|\frac{(-3)^k}{2^k+1}\right| = \frac{3^k}{2^k+1} \geq \frac{3^k}{2^k+2^k} = \frac{3^k}{2\cdot 2^k} = \frac{1}{2}\cdot\left(\frac{3}{2}\right)^k \geq \frac{1}{2}$$

$\therefore$ leddene går ikke mot null $\therefore$ divergens

Alt. Vi kan her også bruke forholdstesten:

$\sum a(k)$ $\quad a(k) = \frac{(-3)^k}{2^k+1}$ $\quad \left|\frac{a(k+1)}{a(k)}\right| = \left|\frac{(-3)^{k+1}}{2^{k+1}+1}\cdot\frac{2^k+1}{(-3)^k}\right|$

$$= \left|(-3)\cdot\frac{2^k+1}{2^k\cdot 2+1}\right| = 3\cdot\frac{2^k+1}{2^k\cdot 2+1} = 3\cdot\frac{1+1/2^k}{2+1/2^k} \to \frac{3}{2} > 1$$

$\therefore$ divergens

c) $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$. Alternerende rekke.

$\left| (-1)^k \frac{\ln k}{k} \right| = \frac{\ln k}{k}$. Vi sjekker om $\frac{\ln k}{k} \searrow 0$.

1) $\lim_{x \to \infty} \frac{\ln x}{x} = \lim_{x \to \infty} \frac{\frac{1}{x}}{1} = \underline{0}$ (l'Hopital) :: $\frac{\ln k}{k} \to 0$

2) $\left(\frac{\ln x}{x}\right)' = \frac{x \cdot \frac{1}{x} - \ln x \cdot 1}{x^2} = \frac{1 - \ln x}{x^2} < 0$ hvis $x > e$

Altså $\frac{\ln k}{k}$ går monotont mot null , $k = 3, 4, 5, \ldots$

neste setning er egentlig overflødig.

:: $\frac{\ln k}{k}$ $k = 3, 4, 5, \ldots$ er monotont avtagende

:: $\sum_{k=3}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$ er konvergent :: $\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k \frac{\ln k}{k}$

er <u>konvergent</u>

d) $\sum_{k=2}^{\infty} \frac{k}{k^2-3}$ er divergent. For det er en positiv

rekke og vi har $\underline{\frac{k}{k^2-3} \geq \frac{k}{k^2} = \frac{1}{k}}$.

Altså rekken er divergent, ved sammenligning med

$\sum \frac{1}{k}$ (som jo er en <u>kjent divergent rekke</u>)

Nr3 a) Vi skal vise at $-\ln(1-x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$,

ved å integrere rekken til $\frac{1}{1-x}$.

1) $\int_0^x \frac{1}{1-\xi} d\xi = \Big[-\ln(1-\xi)\Big]_0^x = -\ln(1-x)$.

2) $\frac{1}{1-\xi} = \sum_{k=0}^{\infty} \xi^k$. Men da får vi ved

leddvis integrasjon:

$$-\ln(1-x) = \int_0^x \frac{1}{1-\xi} d\xi = \sum_{k=0}^{\infty} \int_0^x \xi^k d\xi$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{\xi^{k+1}}{k+1}\right]_0^x = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^{k+1}}{k+1} = \underline{\underline{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}}}$$

OK

b) Vi vet at $\sum_0^{\infty} x^k$ konv. $\Leftrightarrow -1<x<1$, altså

konvergensradien her er 1. Da vet vi at også

rekken til $-\ln(1-x)$ har konvergensradius 1 fordi

en integrert rekke har samme konvergensradius som rekken som blir integrert.

Dermed vet vi at konvergensområdet til $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k}$ minst er lik $\underline{\underline{-1 < x < 1.}}$

Ved direkte sjekking finner vi at konv.området er $[-1, 1\rangle$.

$\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \ln\left(1 - \frac{1}{2}\right)$. siden $-1 < \frac{1}{2} < 1$, så får vi at

$$-\ln\left(\frac{1}{2}\right) = -\ln\left(1 - \frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^k}{k}$$

$\therefore$

$$\underline{\underline{\ln\left(\frac{1}{2}\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{-1}{2^k \cdot k}}}$$

<u>Nr 4</u> a) (i) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot 2^k} (x-2)^k$.

forholdstest: $\left| \frac{(k+2)(x-2)^{k+1}}{(k+1) \cdot 2^{k+1}} \cdot \frac{k \cdot 2^k}{(k+1)(x-2)^k} \right| =$

$$= \left| \frac{(k+2) \cdot k}{(k+1)(k+1)} \cdot \frac{2^k}{2^{k+1}} \cdot \frac{(x-2)^{k+1}}{(x-2)^k} \right| = \frac{1}{2} |x-2| \cdot \frac{(k+2) \cdot k}{(k+1)(k+1)} \to \frac{|x-2|}{2}$$

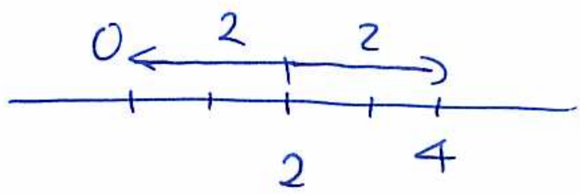
fordi $\frac{k+2}{k+1} \to 1$ og $\frac{k}{k+1} \to 1$.

$\therefore$ konv. hvis $\dfrac{|x-2|}{2} < 1 \iff |x-2| < 2$

div. " $\dfrac{|x-2|}{2} > 1 \iff |x-2| > 2$ $\quad \therefore \underline{\underline{R=2}}$

Største åpne konv. intervall blir da $\underline{0 < x < 4}$.

Vi sjekker endepunktene:



1) $x=0$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k\cdot 2^k}(-2)^k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}(-1)^k \qquad \left| \frac{k+1}{k}(-1)^k \right| = \frac{k+1}{k} \to 1$$

$\therefore$ leddene går ikke mot 0 $\therefore$ $\underline{\text{divergens}}$

2) $x=4$ $\quad \displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k\cdot 2^k}(4-2)^k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k}$

$\dfrac{k+1}{k} \geq 1 \quad \therefore \quad \dfrac{k+1}{k} \not\to 0 \quad \therefore$ divergens

Konv. område: $\underline{\underline{\langle 0, 4 \rangle}}$

(ii) $\displaystyle\sum_{k=0}^{\infty} (4x)^k$. Dette er en geom. rekke, forholdstall $4x$ $\therefore$ konv. $\iff |4x| < 1$

$\Leftrightarrow \quad |x| < \frac{1}{4}$. $\therefore$ $\underline{\underline{R = \frac{1}{4}}}$ konv. område $= \underline{\underline{\langle -\frac{1}{4}, \frac{1}{4} \rangle}}$

(iii) $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{k+1}{k!} x^k$. forholdstest: $\left| \frac{k+2}{(k+1)!} x^{k+1} \cdot \frac{k!}{(k+1)x^k} \right|$

$$= \frac{k+2}{k+1} \cdot \frac{k!}{(k+1)!} |x| = \underbrace{\frac{k+2}{k+1}}_{\downarrow 1} |x| \cdot \frac{1}{k+1} \to 0$$

$\therefore$ $\underline{\underline{R = \infty}}$ konv. område $= \underline{\underline{\langle -\infty, \infty \rangle}}$

b) (i) $\sum_{1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot 2^k} (x-2)^k = \sum_{1}^{\infty} \frac{\cancel{k}}{\cancel{k} \cdot 2^k} (x-2)^k +$

$$+ \sum_{1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot 2^k} (x-2)^k = \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{x-2}{2}\right)^k}_{1)} + \underbrace{\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k} \left(\frac{x-2}{2}\right)^k}_{2)}$$

1) er en geom. rekke. $\boxed{\text{forholdstall } \frac{x-2}{2} \text{, 1. ledd } \frac{x-2}{2}.}$

2) er en rekke som i a) med x der som $\frac{x-2}{2}$.

M.a.o. $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k+1}{k \cdot 2^k} (x-2)^k = \frac{x-2}{2} \cdot \frac{1}{1 - \left(\frac{x-2}{2}\right)} - \ln\left(1 - \frac{x-2}{2}\right)$

$$= \frac{x-2}{2-(x-2)} - \ln\left(\frac{2-(x-2)}{2}\right)$$

$$= \frac{x-2}{4-x} - \ln\left(\frac{4-x}{2}\right) = \frac{x-2}{4-x} - \ln\left(\frac{4-x}{2}\right)$$